
NÄHERUNGSWEISE LÖSUNGEN

Auch wenn wir noch nicht perfekt Differentialgleichungen lösen können, sind wir schon jetzt oft in der Lage, näherungsweise Lösungen in Form von Potenzreihen oder iterativen Ansätzen zu finden.

[H22] *Anharmonische Kraft* **[$6 + 4 + 4 + 3 + 4 = 18$ Punkte]**

Wir betrachten eine anharmonische Schwingung mit der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) = 6\,\omega^2\,\frac{1}{x_0}\,x(t)^2 - 8\,\omega^2\,\frac{1}{x_0^2}\,x(t)^3\,, \quad x(0) = x_0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,.$$

Für die hier gegebenen speziellen Anfangsbedingungen können wir dieses Problem tatsächlich mit den uns bekannten Methoden lösen.

(a) Um diese Bewegungsgleichung zu lösen, machen Sie einen Potenzreihenansatz der Form

$$x(t) = c_0 + c_1\,t + c_2\,t^2 + c_3\,t^3 + c_4\,t^4 + \ldots$$

und bestimmen die ersten fünf Koeffizienten c_i, $i = 0, \ldots 4$, indem Sie zunächst die Anfangsbedingungen auswerten und dann $\ddot{x}$ bilden. Überlegen Sie, bis zu welcher Ordnung Sie die Terme auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung berücksichtigen müssen. Vergleichen Sie dann die Koeffizienten von Termen mit jeweils gleichen Potenzen.

(b) Mit dem Resultat für $x(t)$ bis einschließlich der Ordnung t^4 können Sie die geschlossene Form für $x(t)$ erraten, wenn Sie sich an die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ erinnern. Bestätigen Sie dies durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung.

(c) Nach Newton ist $F = m\,a = m\,\ddot{x}$. Wenn wir die Masse $m = 1$ setzen, gibt die rechte Seite der Bewegungsgleichung also die Kraft $F(x)$ an. Versuchen Sie, eine Funktion $V(x)$ zu finden, so dass deren negative Ableitung $-V'(x) = F(x)$ die Kraft ergibt.

(d) Mit der Masse $m = 1$ ist die *kinetische Energie* gegeben als $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,\dot{x}^2$. Berechnen Sie diese, und damit die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + V(x)$.

(e) Welches Integral gibt die Laufzeit T zwischen den Umkehrpunkten an? Können Sie damit das durchaus seltsame Verhalten von $x(t)$ für $t \to \infty$ verstehen?

Hinweis: In dieser Aufgabe wurden die Anfangsbedingungen speziell so gewählt, dass die Bewegungsgleichung für eine anharmonische Kraft exakt lösbar war. Dies ist leider die Ausnahme und in der Regel nicht möglich.

[H23] *Iterative Lösung* **[$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ Punkte]**

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q rast auf der x-Achse von links mit großer Geschwindigkeit v_0 auf einen Raumbereich zu, in dem das Magnetfeld $\vec{B} \doteq (0, 0, B)^{\intercal}$ herrscht. Der Eintritt erfolgt bei $\vec{r}(0) \doteq (0, 0, 0)^{\intercal}$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Beachten Sie, dass das Problem zweidimensional ist.

(b) Beginnen Sie mit $\vec{r}^{\,(0)}(t) \doteq (v_0 t, 0, 0)^{\intercal}$ als nullter Näherung. Setzen Sie diese in die Lorentzkraft ein, und lösen damit die Bewegungsgleichung. Die Lösung ist Ihre erste Näherung $\vec{r}^{\,(1)}(t)$.

(c) Wiederholen Sie das Iterationsverfahren mit $\vec{r}^{\,(1)}$ um eine zweite Näherung $\vec{r}^{\,(2)}(t)$ zu erhalten. Für schwache Magnetfelder sollte dies bereits eine brauchbare Näherung darstellen.

(d) Geladene Teilchen beschreiben im homogenen Magnetfeld (angeblich) Kreisbahnen, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden, d.h., der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant. Welche Kreisfrequenz ω und welchen Radius R hätte diese Kreisbahn?

(e) Entwickeln Sie die exakte Lösung in Potenzen von B und vergleichen mit dem Iterationsresultat.

Hinweise: Die Kreisbahn wird durch $\vec{r}(t) \doteq (R\sin\omega t, -R{+}R\cos\omega t, 0)$ beschrieben. Die Lorentzkraft ist $\vec{F} = q\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{B})$.

HINWEIS: Name, Matrikelnummer und Übungsgruppe angeben! Lösungen nur als PDF!

Bitte wenden!

[C4] *Taylorentwicklung* **[$9 + 12^* = 21$ Computerpunkte $+ 6^*$ Extracomputerpunkte]**

Dies ist die vierte Computerübung. Bitte beachten Sie unbedingt die Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe von Computerübungen in Abschnitt 5 der Informations-Seiten zur Vorlesung im Stud.IP, den Sie im Kapitel „Abgabe von Übungen“ finden. Die Computerübung ist in *Python* zu lösen. Ihre Lösung dokumentieren und kommentieren Sie bitte ausführlich in einem Jupyter-Notebook.

Mit Hilfe des Befehls `series` aus dem SymPy-Modul können Sie in Python ganz leicht Taylorreihen berechnen. An zwei einfachen Beispielen sollen Sie dies tun und dabei überprüfen, in wie weit die Taylorreihe die eigentliche Funktion gut annähert.

(a) Die Energie eines Teilchens mit Masse m, das sich mit Geschwindigkeit v bewegt, ist nach Einstein gegeben als $E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Hierbei bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit. Setzen Sie der Einfachheit halber $c = 1$ und $m = 1$. Berechnen Sie die Taylorreihen bis jeweils einschließlich der Ordnung k, $k = 2, 4, 6$. Erstellen Sie einen Vergleichsplot, in dem Sie die korrekte Formel und die Näherungen für den Bereich $v \in [0, 1)$ darstellen.
Hinweise: Definieren Sie den Ausdruck für die Energie zunächst symbolisch mittels SymPy. Verwenden Sie `sympy.series`, um den Ausdruck zu entwickeln. Entfernen Sie die Landau-Symbole $\mathcal{O}(v^k)$ mithilfe von `.removeO()` aus den Taylorentwicklungen. Wenden Sie `sympy.lambdify` auf die Ausdrücke an. Damit werden die Ausdrücke in Funktionen umgewandelt, die eine numerische Auswertung z.B. mit NumPy erlauben. Dies ist sehr viel schneller als die Auswertung durch SymPy (mittels `subs` oder `evalf`). Hier ein Beispiel für die Verwendung von `lambdify`:

In[1]:=

```
import sympy as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Symbole definieren
x, k = sp.symbols('x k')

#Ausdruck definieren
expr = x**k

#x-Werte erstellen
xlist = np.linspace(0, 1, 100)

#Ausdruck in numerisch verwertbare Funktion in x umwandeln für einen Wert k=2
exprf = sp.lambdify(x, expr.subs(k, 2), 'numpy')
#exprf ist nun eine Funktion, die mit exprf(x) aufgerufen werden kann.

#Diese Funktion nun zum Plotten verwenden
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(xlist, exprf(xlist))
plt.show()
```

(b) Erstellen Sie ein `ipywidget` mit einem interaktiven Plot, in dem die Funktion $\sin(x)$ im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$ mit ihrer Taylorreihe bis einschließlich der Ordnung k verglichen wird. Dabei soll k in dem Widget mit einem Schieberegler auf die Werte $k \in 1, 3, 5, ..., 19$ eingestellt werden können.
Hinweise: Eine gute Einführung dazu, wie man eine solche interaktive Umgebung baut, kann man hier nachlesen. Richten Sie zuerst das `ipympl` Backend ein, was matplotlib-Plots interaktiv macht. Dies geht mit einem „magic command“, der mit `%` beginnt. Importieren Sie auch das `ipywidgets` Modul. Mithilfe der `decorator`-Syntax und der Funktion `interact` erstellen Sie ein Widget mit einem Schieberegler für die Ordnung der Taylerentwicklung k. Darin rufen Sie eine Update-Funktion auf, welche bei Verschiebung des Reglers den bereits vorhandenen Graphen der Taylorreihe durch einen neuen für das gewählte k ersetzt.

(c*) Schreiben Sie selbst eine Funktion, die eine ähnliche Syntax wie `sympy.series` hat und die Taylorreihe einer Funktion in einer gegebenen Variable um eine gegebene Stelle zu einer gegebenen Ordnung berechnet. Natürlich dürfen Sie hier nicht die den Befehl `sympy.series` verwenden, sondern nur beispielsweise `sum` für eine Summation und `sympy.diff` für Ableitungen.

[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.